Title	線型常微分方程式系の変形とτ函数 (線型微分方程式の変形理論とアーベル函数論の拡張への新しい視点)
Author(s)	三輪, 哲二; 神保, 道夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1980), 388: 59-65
Issue Date	1980-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/104914
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
388巻 1980年 59-65

線型常微分方程式系の変形とτ函数

京大数研　三輪哲二
神保道夫

研究集会では、変形の一般理論のうち代数的な部分を一通り話した。これらについては、その詳細を例と共に次の文献にまとめてある（近刊の「数学」に解説発表予定）：

◎ モノドロミー保存変形の一般論，完全積分可能性，τ函数の導入，ソリトン・有理解

M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I, RIMS preprint 319 (1980)

◎ Schlesinger変換，τ商，Painlevé 方程式の連立線型化，$sl(2)$の場合の変形，準周期解

M. Jimbo and T. Miwa, —— II, RIMS preprint 327 (1980)

◎ "subholonomic" な系 $d\Omega(x) = \Omega(x)^2$ に対するτ函数，特性行列のτ表示，τの広田双線型方程式

M. Jimbo and T. Miwa, Deformation of linear ordinary differential equations. III, RIMS preprint 329 (1980).

これらの一般論を繰り返し述べてもあまり意味がないので，本稿では補足として一つの例を述べるに止める。

基本周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ をもつ1次元複素トーラス $\mathbb{T}^1$ 上に，一点 α を固定する。(以下用いる Weierstrass の楕円函数の記号は，岩波数学公式集Ⅲに従う。) 整数 $\ell \in \mathbb{Z}$ とパラメタ $t \in \mathbb{C}$ を与えて，次の函数を考える：

$$
(1) \qquad \begin{aligned} y_\ell(z) &= y_\ell(z; t, \alpha) \\ &= \sigma(z-\alpha)^{\ell-1}\sigma(z+\alpha)^{-\ell}\sigma(z+t+(2\ell-1)\alpha)e^{-\frac{t}{2}(\zeta(z-\alpha)+\zeta(z+\alpha))} \end{aligned}
$$

σ 函数，ζ 函数の擬周期性から，$y_\ell(z)$ は $z=\pm\alpha \pmod{2\omega_1, 2\omega_3}$ を除き至る所一価正則なトーラス上の函数を与える。$z \to \alpha$ のときは

$$
(2) \qquad \begin{aligned} y_\ell(z) &= \hat{y}_\ell(z)\cdot(z-\alpha)^{\ell-1}\exp\left(-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{\wp''(\alpha)}{2\wp'(\alpha)}\right)\right) \\ \hat{y}_\ell(z) &= c_0\,(1+c_1\cdot(z-\alpha)+\cdots) \\ c_0 &= \sigma(2\alpha)^{-\ell}\sigma(t+2\ell\alpha)e^{-\frac{t}{2}\zeta(2\alpha)-\frac{t\wp''(\alpha)}{4\wp'(\alpha)}} = c_0(t,\alpha,\ell) \\ c_1 &= \zeta(t+2\ell\alpha)-\ell\zeta(2\alpha)+\frac{t}{2}\wp(2\alpha) = c_1(t,\alpha,\ell) \end{aligned}
$$

なる挙動をもつ。以上の性質は逆に $y_\ell(z)$ を特徴づける。

被覆写像 $\mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$，$z \mapsto x=\wp(z)$ の分岐点を $e_1, e_2, e_3, e_\infty=\infty \in \mathbb{P}^1$ とする。$\mathbb{P}^1$ 上の多価解析的行列 $Y(x)$ を次の式で定める：

$$
(3) \qquad \begin{aligned} Y(x) &= G_0^{-1}\tilde{Y}(z) \\ G_0^{-1} &= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{c_0(t,\alpha,\ell)},\ \frac{1}{c_0(t,\alpha,-\ell)}\right) \end{aligned}
$$

$$\tilde{Y}(z)=\begin{pmatrix} y_\ell(z) & y_\ell(-z) \\ y_{\ell+1}(z) & y_{\ell+1}(-z) \end{pmatrix}.$$

以下$\wp(\alpha)\neq e_1,e_2,e_3,e_\infty$と仮定する。このとき，$Y(x)$は次の形の$\mathbb{P}^1$上の線型常微分方程式系を満たす：

$$(4)\qquad \frac{dY}{dx}=A(x)Y$$

$$A(x)=\frac{A_{-2}}{(x-a)^2}+\frac{A_{-1}}{x-a}+\frac{B_1}{x-e_1}+\frac{B_2}{x-e_2}+\frac{B_3}{x-e_3}$$

$$A_{-2}=\begin{pmatrix}\bar{t}/2 & \\ & -\bar{t}/2\end{pmatrix},\quad \bar{t}=\wp'(\alpha)t,\quad a=\wp(\alpha).$$

このことを見るために，$Y(x)$のモノドロミー性質を調べてみよう。

<u>$x=a$ での挙動</u>

式(2)と，$z-\alpha=\frac{1}{\wp'(\alpha)}(x-a)-\frac{\wp''(\alpha)}{2\wp'(\alpha)^3}(x-a)^2+\left(\frac{\wp''(\alpha)^2}{2\wp'(\alpha)^5}-\frac{\wp'''(\alpha)}{6\wp'(\alpha)^4}\right)(x-a)^3+\cdots$

に注意すれば，次の式を得る：

$$(5)\qquad Y(x)=\hat{Y}^{(\alpha)}(x)\,e^{T^{(\alpha)}(x)+K}$$

$$(6)\qquad T^{(\alpha)}(x)=\begin{pmatrix}\bar{t}/2 & \\ & -\bar{t}/2\end{pmatrix}\frac{-1}{x-a}+\begin{pmatrix}\ell-1 & \\ & -\ell-1\end{pmatrix}\log(x-a)$$

$$K=\begin{pmatrix}-\ell+1 & \\ & \ell+1\end{pmatrix}\log\wp'(\alpha)$$

$$(7)\qquad \hat{Y}^{(\alpha)}(x)=\left(1+Y_1^{(\alpha)}\cdot(x-a)+\cdots\right)$$

$$Y_1^{(\alpha)}=\frac{1}{\wp'(\alpha)}\tilde{Y}_1^{(\alpha)}+\frac{t}{2}\left(\frac{\wp''(\alpha)^2}{4\wp'(\alpha)^3}-\frac{\wp'''(\alpha)}{6\wp'(\alpha)^2}\right)\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}-\frac{\wp''(\alpha)}{2\wp'(\alpha)^2}\begin{pmatrix}\ell-1 & \\ & -\ell-1\end{pmatrix}$$

$$\tilde{Y}_1^{(\alpha)}=\begin{pmatrix} c_1(t,\alpha,\ell) & \dfrac{c_0(-t,\alpha,1-\ell)}{c_0(t,\alpha,\ell)} \\ \dfrac{c_0(t,\alpha,\ell+1)}{c_0(-t,\alpha,-\ell)} & c_1(-t,\alpha,-\ell) \end{pmatrix}$$

$x=e_\nu$ での挙動

はじめに $\nu=1,2,3$ とする。y_ℓ の展開は

$$(8)_\nu \qquad y_\ell(z;t,\alpha)=y_\ell(\omega_\nu;t,\alpha)\left(1+f_\ell^{(\nu)}\cdot(z-\omega_\nu)+\cdots\right)$$

$$y_\ell(\omega_\nu;t,\alpha)=\frac{\sigma_\nu(t+(2\ell-1)\alpha)}{\sigma_\nu(\alpha)}$$

$$f_\ell^{(\nu)}=\zeta_\nu(t+(2\ell-1)\alpha)-(2\ell-1)\zeta_\nu(\alpha)+t\wp(\alpha+\omega_\nu)$$

但し $\sigma_\nu(z)=e^{-\eta_\nu z}\sigma(z+\omega_\nu)/\sigma(\omega_\nu)$, $\zeta_\nu(z)=\zeta(z+\omega_\nu)-\eta_\nu$ はそれぞれコ・シグマ函数，コ・ツェータ函数を表わす。これらより，

$$(9)_\nu \qquad Y(x)=G^{(\nu)}\hat{Y}^{(\nu)}(x)(x-e_\nu)^{\begin{pmatrix}0&\\&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

とおけば

$$(10)_\nu \qquad G^{(\nu)}\hat{Y}^{(\nu)}(x)=G_0^{-1}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}y_\ell(z)+y_\ell(-z) & \dfrac{y_\ell(z)-y_\ell(-z)}{z-\omega_\nu}\\ y_{\ell+1}(z)+y_{\ell+1}(-z) & \dfrac{y_{\ell+1}(z)-y_{\ell+1}(-z)}{z-\omega_\nu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&\dfrac{z-\omega_\nu}{\sqrt{x-e_\nu}}\end{pmatrix}$$

$$=G^{(\nu)}\left(1+Y_1^{(\nu)}\cdot(x-e_\nu)+\cdots\right)$$

$$G^{(\nu)}=G_0^{-1}\begin{pmatrix}y_\ell(\omega_\nu)&\\&y_{\ell+1}(\omega_\nu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&f_\ell^{(\nu)}\\1&f_{\ell+1}^{(\nu)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&\sqrt{\dfrac{2}{\wp''(\omega_\nu)}}\end{pmatrix}$$

を得る。$\left(\sqrt{\dfrac{2}{\wp''(\omega_\nu)}}=\dfrac{1}{\sqrt{\prod_{\mu(\neq\nu)}(e_\mu-e_\nu)}}\right)$

$x=\infty$, $z=0$ においても全く同様で，(8) を

$$(8)_\infty \qquad y_\ell(0;t,\alpha)=(-)^{\ell-1}\frac{\sigma(t+(2\ell-1)\alpha)}{\sigma(\alpha)}$$

$$f_\ell^{(\infty)}=\zeta(t+(2\ell-1)\alpha)-(2\ell-1)\zeta(\alpha)+t\wp(\alpha)$$

でおきかえれば

$$(9)_\infty \qquad Y(x)=G^{(\infty)}\hat{Y}^{(\infty)}(x)\left(\frac{1}{x}\right)^{\begin{pmatrix}0&\\&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$(10)_\infty \qquad \hat{Y}^{(\infty)}(x) = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G^{(\infty)} = G_0^{-1}\begin{pmatrix} y_\ell(0) & \\ & y_{\ell+1}(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f_\ell^{(\infty)} \\ 1 & f_{\ell+1}^{(\infty)}\end{pmatrix}$$

がわかる。

Fuchs の関係式

$$(11) \qquad \mathrm{tr}\begin{pmatrix} \ell-1 & \\ & -\ell-1 \end{pmatrix} + 4 \times \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & \\ & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = 0$$

の成立に注意すれば，以上 (5) ~ (10) によって (4) を確かめるのは容易である。特に

$$(12) \qquad \det Y(x) = \wp'(\alpha)^2 \frac{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}{\sqrt{(a-e_1)(a-e_2)(a-e_3)}} \frac{1}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{2\wp'(\alpha)}{(x-a)^2}\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}$$

が従う。直接計算すれば $\det Y(x)$ は σ 函数で表示されるから，(12) は

$$(13) \qquad -\frac{\wp'(z)\wp'(\alpha)}{(\wp(z)-\wp(\alpha))^2} = \frac{\sigma(z-\alpha+u)\sigma(z-\alpha-u)}{\sigma(z-\alpha)^2\sigma(u)^2} - \frac{\sigma(z+\alpha+u)\sigma(z+\alpha-u)}{\sigma(z+\alpha)^2\sigma(u)^2}$$

$$(u = t + 2\ell\alpha)$$

に同等である。

一般論を参照すれば、$Y(x)$ の (i) 形式モノドロミー，(ii) 接続係数，(iii) $z=\alpha$ での Stokes 係数 (=1)，はいずれも変形パラメタ t によらないことから，次の式が成立する。

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial t} Y(x) = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1\end{pmatrix}\frac{-1}{x-a} - \left[Y_1^{(\alpha)}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1\end{pmatrix}\right]\right) Y(x)$$

定義に従って τ 函数を計算すれば

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\log\tau = \wp'(\alpha)\ \mathrm{tr}\ Y_1^{(\alpha)}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \zeta(t+2\ell\alpha) + \frac{t}{2}\left(\wp(2\alpha) + \frac{\wp''(\alpha)^2}{4\wp'(\alpha)^2} - \frac{\wp'''(\alpha)}{6\wp'(\alpha)}\right)$$
$$- \ell\left(\zeta(2\alpha) + \frac{\wp''(\alpha)}{2\wp'(\alpha)}\right)$$

$$(16) \quad \therefore \quad \tau(t) = \tau_\ell(t) = \mathrm{const.}\ \sigma(t+2\ell\alpha)\, e^{h_\ell(t)}$$
$$h_\ell(t) = \frac{t^2}{4}\left(\wp(2\alpha) + \frac{\wp''(\alpha)^2}{4\wp'(\alpha)^2} - \frac{\wp'''(\alpha)}{6\wp'(\alpha)}\right) - t\ell\left(\zeta(2\alpha) + \frac{\wp''(\alpha)}{2\wp'(\alpha)}\right)$$

となる。（$\wp$の微分方程式と倍数公式を認めれば$h_\ell(t)$の第1項は$\frac{t^2}{2}\wp(2\alpha)$。）

式(6)からわかる通り，我々の$Y(\alpha)$は$\ell=0$の場合から形式モノドロミーを$\begin{pmatrix}\ell & \\ & -\ell\end{pmatrix}$ずらすSchlesinger変換で得られている。一般論によれば（文献II，(4.3)）この時τ商は$Y^{(\alpha)}_{1,12} = \frac{\tau_{\ell-1}}{\tau_\ell}$，$Y^{(\alpha)}_{1,21} = \frac{\tau_{\ell+1}}{\tau_\ell}$となるが(16)からこれは直接確認される。今の場合一般論からは導かれない特殊事情として，Schlesinger変換の効果がτ函数の変数を有限な数$2\ell\alpha$だけずらす（本質的には）という形で現われている。このことは準周期解のτ函数（〜テータ函数）が加法公式を持つことの一つの根拠と推察されるが，詳しいことは判っていない。例えば，一般論の次の式（II, (6.79)）

$$(17) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\log\tau_\ell = \frac{\tau_{\ell+1}\tau_{\ell-1}}{\tau_\ell^2}$$

を書き下してみると，今の場合

$$(18) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\log\sigma(u) + \frac{1}{2}\left(\wp(2\alpha) + \frac{1}{4}\frac{\wp''(\alpha)^2}{\wp'(\alpha)^2} - \frac{1}{6}\frac{\wp'''(\alpha)}{\wp'(\alpha)}\right)$$
$$= \frac{\sigma(u+2\alpha)\sigma(u-2\alpha)}{\sigma(u)^2\sigma(2\alpha)^2} \qquad (u = t+2\ell\alpha)$$

という一種の加法公式を得る。（左辺 $= -\wp(u) + \wp(2\alpha)$）

他のSchlesinger変換も，一般論の公式から読みとることができる。例えば点 $x=e_\nu$ で形式モノドロミーを $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$，点 α で $\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ ずらす時の τ 函数 $\tau\begin{Bmatrix} \alpha & e_\nu \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$ は $(10)_\nu$ から

$$(19) \qquad \tau\begin{Bmatrix} \alpha & e_\nu \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_\nu(t+(2l-1)\alpha)}{\sigma_\nu(\alpha)}\sigma(2\alpha)^{l} e^{h_{l-\frac{1}{2}}(t)}$$

となる。